## 28 À chacun son rythme

### Dans 40 s, l'alarme se déclenchera…

**1.** Déterminons l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C$ aux bornes du condensateur lorsqu'un utilisateur entre dans l'appartement. Dans ce cas, l'interrupteur K est ouvert, donc :

– d'après la loi des mailles : $u_R + u_C = E$ ;

– d'après la loi d'Ohm : $u_R = R \times i$ avec $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $R \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.

Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{-1}{R \times C} u_C + \dfrac{E}{R \times C}$.

**2.** Les solutions d'une équation du type $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $K$ une constante d'intégration réelle.

Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{R \times C}$ et $b = \dfrac{E}{R \times C}$, donc $\dfrac{b}{a} = -E$.

Les solutions s'écrivent : $u_C = K \times e^{-\frac{t}{RC}} + E$.

Pour $t = 0$ s, on a $u_C = K + E = 0$ V d'après les conditions initiales (le condensateur est déchargé). Ainsi $K = -E$ et

$$u_C = -E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} + E \text{ soit } u_C = E \times \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \text{ avec } \tau = R \times C.$$

**3.** L'alarme se déclenche pour une durée $\Delta t = t_{\text{décl}} - 0$ telle que $u_C = 5{,}0$ V. Il vient alors :

$$\frac{u_C}{E} = 1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} \Rightarrow e^{-\frac{\Delta t}{\tau}} = 1 - \frac{u_C}{E}$$

soit $\Delta t = -\tau \times \ln\left(1 - \dfrac{u_C}{E}\right)$

soit $\Delta t = -R \times C \times \ln\left(1 - \dfrac{u_C}{E}\right)$, donc :

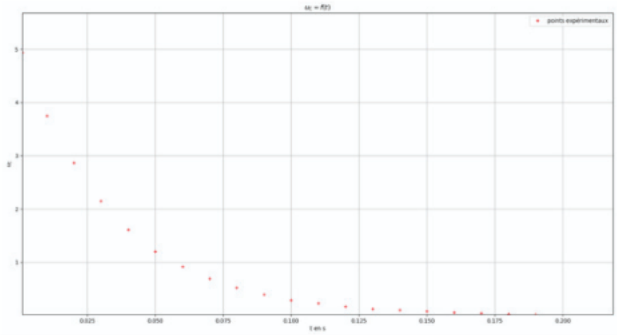
$$\Delta t = -1{,}0 \times 10^6\ \Omega \times 22 \times 10^{-6}\ \text{F} \times \ln\left(1 - \frac{5{,}0\ \text{V}}{6{,}0\ \text{V}}\right) = 39\ \text{s}.$$

## 29 Python

### Temps caractéristique

**Ressources pour le professeur à télécharger :**
- **Fichier Python**
- **Explications du programme en langage Python**

**1.** On met en œuvre le programme.
La courbe fournie est la suivante :



Il s'agit d'une décharge du condensateur car $u_C$ décroît au cours du temps. Par lecture graphique à $t = 0$ s, on lit la tension sous laquelle le condensateur a été initialement chargé : $E = 5$ V environ.

**2.** Lors de la décharge, la tension aux bornes du condensateur est définie par :

$$u_C = E \times e^{-\frac{t}{R \times C}} \Rightarrow \ln u_C = \ln\left(E \times e^{-\frac{t}{R \times C}}\right) = \ln E - \frac{t}{R \times C}.$$

**3.** Il est nécessaire de calculer les valeurs de $\ln u_C$. Pour cela, on rentre la ligne suivante dans le programme :

```
lntension=np.log(tension)
```

ou

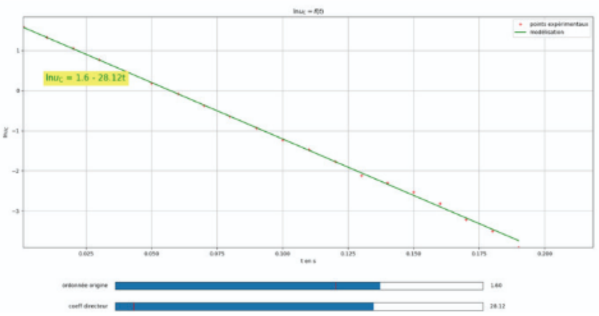
```
lntension =[np.log(valeurs) for valeurs in tension]
```

ou encore

```
for i in range len(tension)
    lntension=lentension+[np.log(tension[i])]
```

Le programme affiche directement la courbe si la liste `lntension` n'est pas vide.

**4.** On obtient la représentation graphique suivante :




L'équation de la courbe est :
$\ln u_C = 1{,}6 - 28{,}12 \times t$ (unités SI).

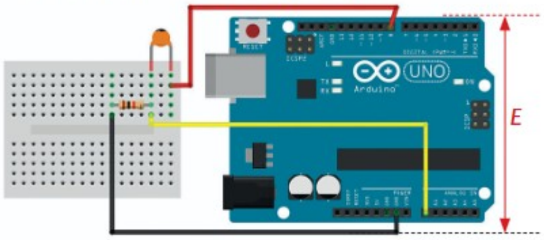
**5.** D'après **2.** et **4.** on a :

$$-28{,}12\ \text{s}^{-1} = -\frac{1}{R \times C} \text{ d'où } \tau = \frac{1}{28{,}12\ \text{s}^{-1}}$$

$$\text{soit } C = \frac{1}{28{,}12\ \text{s}^{-1} \times R} = \frac{1}{28{,}12\ \text{s}^{-1} \times 220\ \Omega} = 1{,}62 \times 10^{-4}\ \text{F}.$$

## 25 Détermination d'une capacité

**1.** D'après la loi des mailles, $E = u_R + u_C$, sachant que $E$ est la tension entre les deux bornes 8 et GND égale à 5,00 V.

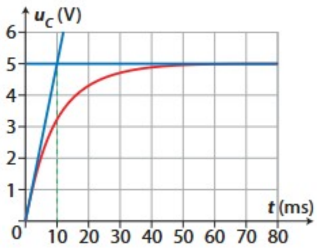



On déduit de cette relation l'expression de :
$u_C = E - u_R$ soit $u_C = 5{,}00 - u_R$.
On calcule les valeurs de $u_C$ consignées dans le tableau suivant :

| $t$ (ms) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_R$ (V) | 3,03 | 1,84 | 1,12 | 0,68 | 0,41 | 0,25 | 0,15 |
| $u_C$ (V) | 1,97 | 3,16 | 3,88 | 4,32 | 4,59 | 4,75 | 4,85 |

| $t$ (ms) | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_R$ (V) | 0,09 | 0,06 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,01 | 0 |
| $u_C$ (V) | 4,91 | 4,94 | 4,97 | 4,98 | 4,99 | 4,99 | 5,00 |

**2.** La représentation graphique de la courbe $u_C = f(t)$ est la suivante :




## 22 Le défibrillateur

**1.** Lors de la charge du condensateur, l'interrupteur $K_1$ est fermé. L'interrupteur $K_2$ est ouvert.
D'après la loi des mailles, $u_r + u_C = E$.
D'après la loi d'Ohm, $u_r = r \times i$ avec $i = \dfrac{dq}{dt} = C \times \dfrac{du_C}{dt}$.
On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur lors de sa charge : $r \times C \times \dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$.
Ce qui s'écrit aussi : $\dfrac{du_C}{dt} = \dfrac{-1}{r \times C} \times u_C + \dfrac{E}{r \times C}$.

**2.** Les solutions d'une équation de la forme $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) sont de la forme $y = K \times e^{ax} - \dfrac{b}{a}$ avec $K$ une constante d'intégration réelle.
Par identification, on trouve $a = -\dfrac{1}{r \times C}$ et $b = \dfrac{E}{r \times C}$ soit $\dfrac{b}{a} = -E$.
Donc $u_C = K \times e^{-\frac{t}{r \times C}} + E$.
Pour $t = 0$ s, d'après les conditions initiales, $u_C = K + E = 0$ V. Ainsi $K = -E$ donc $u_C = -E \times e^{-\frac{t}{r \times C}} + E = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ avec $\tau = r \times C$.

Pour $t \to \infty$, $u_C = E\left(1 - e^{-\frac{\infty}{\tau}}\right) = E(1 - 0) = E$.

Graphiquement, on repère l'asymptote horizontale de la courbe lorsque $t$ tend vers l'infini.